

A 49. ORTVAY RUDOLF

FIZIKAI PROBLÉMAMEGOLDÓ VERSENY FELADATAI

2018. október 26 — november 5.

1. A gumipartiak gyakran használják a gumitermelés melléktermékeként előálló vékony gumiréteget ruháik foltozására, apróbb eszközök csomagolására és így tovább. Gumipart főfizikusa, Mynden Lee ben Canal egy séta közben meglátja, ahogyan a gyerekek összegyűrt gumirétegből formált labdákkal játszanak. Közelebbről megnézve, azt is észreveszi, hogy a labda nem egynemű, számottevő részét levegő tölti ki.

Canal érdeklődését felkelti a labda szerkezete, különösen az, hogy milyen D Absoluto-(Gumiparton kívül Hausdorff-nak nevezett)-dimenzióval jellemezhető. Ennek értelmezése a következő: válasszunk ki egy, a gumiréteg d vastagságánál lényegesen nagyobb r sugarú térfogatot a labda geometriai felületén belül. Ha (nem részletezett módon statisztikai átlagot véve) az r sugarú gömbön belüli tömeget a $m(r) \approx kr^D$ képlettel közelíthetjük, akkor a D kitevő a dimenzió.

Canal szeretné ezt a D kitevőt meghatározni, ám a gumiparti tudomány ismert eszközellátottsága következtében mindössze egy stopper, egy mérőszalag és egy fémcsatornás lejtő áll rendelkezésére. Meg természetesen egy saját készítésű, közel gömb alakú gyűrt gumilabda. A kísérleti elrendezése olyan, hogy a h magasságú lejtőről csúszásmentesen gördül le a labda, és leéréskor v sebességre tesz szert. Papír és ceruza szerencsére bőven akad. Kövessük a gondolatmenetét, és fejezzük ki a D értékét a kísérletileg adott paramétereiből! A súrlódás és közegellenállás elhanyagolható.

Javaslat: Ha van időnk, kísérletezzünk (gumifólia híján) összegyűrt alufólia-golyókkal! A fenti leíráson túli eszközök használata is megengedett. Ha golyónk nem gördül megfelelően, érdemes lehet egy sima felületen óvatosan mozgatva lecsiszolni a felületi egyenetlenségeket.

(Gombkötő Ákos)

2. Egy egyenes úton $V = 80$ km/h a sebességhatár. Az útra egy R sugarú körforgalmat építenek. Hány másodperccel lesz hosszabb megtenni azt az útszakaszt a körforgalommal együtt, mint korábban az egyenes úton? Hogyan függ ez az időkülönbség a körforgalom R sugarától? Készítsünk ábrát az idővesztéséről a sugár függvényében! A Google térkép segítségével keressünk néhány valóban létező körforgalmat, mérjük le a sugarát, és tüntessük fel ezt is az ábrán! Hány méter sugarú legyen a körforgalom, hogy az autós a lehető legtöbb időt veszítse a körforgalom megépítésével az egyenes úthoz képest? Hány méter sugarú legyen, hogy a legkevesebb időt veszítse? Mennyi ez a legkevesebb/legtöbb idő? Hogyan függ ez a két speciális sugár a V sebességhatártól?

Feltételek: az autós a sebességhatárt betartva mindig a lehető leggyorsabban hajt, végig az út középvonalán (soha nem „vágja le” a kanyart). Az úton egyszerre csak egyetlen autó közlekedik, más autó, forgalom, dugó nincs. A körforgalom középpontja rajta van a korábbi egyenes úton. Az autó gyorsulásának abszolút értéke mindig legfeljebb $a_0 = 2$ m/s² lehet. A körforgalomra egy vele azonos sugarú íven lehet ráhajtani, ami az egyenes úthoz és a körforgalomhoz is simán illeszkedik. Adjuk meg a numerikus eredményeket is, ne csak a képleteket!

(Veres Gábor)

3. Egy L hosszúságú vízszintes feszített kötél végéhez egy m tömegű test van kötve. A kötél tömege elhanyagolható. A kötél szabad végét a kezdeti irányra merőlegesen v sebességgel mozgatjuk. A test súrlódva csúszik a talajon. Hogy függ a mozgása a húzás sebességétől?

(Szabó István)

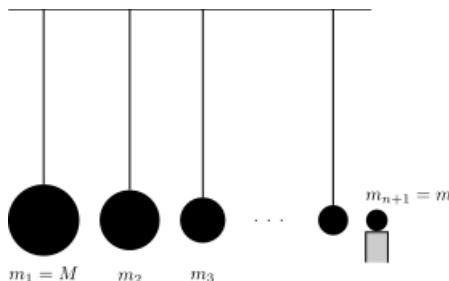
4. Legendák szólnak arról, hogy egyes ausztrál bennszülöttek képesek a bumerángot akár 100 méter távolságra is eldobni úgy, hogy visszatérjen hozzájuk. Vizsgáljuk meg ennek lehetőségét egyszerűsítő modellezéssel! Feltételezhetjük, hogy a bumeráng dobásának időtartama alatt a gravitáció elhanyagolható, a bumeráng tömegközéppontja jó közelítéssel vízszintes síkban mozog, közelítően körpályán. Fejezzük ki a kör sugarát a dobás paramétereivel, illetve a bumeráng tulajdonságaival! Döntsük el, hogy lehetséges-e a legenda állítása, illetve hogy min múlik ez!

(Gombkötő Ákos)

5. Az ábrán látható n darab inga és a tartóra helyezett golyó tömege mértani sorozatot alkot: az első $m_1 = M$, az utolsó, ami már nincs felfüggesztve, $m_{n+1} = m$. Az elsőt v_1 sebességgel nekilökjük a másodiknak, az meglöki a harmadikat, és így tovább.

a) Mekkora v_{n+1} sebességgel indul el az ütközések után az utolsó golyó, ha az ütközések rugalmasak? Meddig növelhető ez a sebesség az ingák számának változtatásával adott M és m mellett?

b) A valóságos ütközések nem tökéletesen rugalmasak, vagyis a k ütközési szám (a tömegközépponti rendszerben az ütközés utáni és előtti sebességek aránya) egy kicsit mindig kisebb 1-nél. Meddig növelhető az utolsó golyó sebessége az ingák számának megfelelő megválasztásával, ha $k = 0.99$ és $m = 10^{-4}M$?



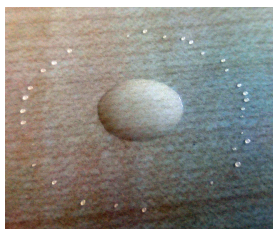
(Vladár Károly)

6. Stabilan egy falnak támasztva, a függőlegestől kis α szöggel eltérő állású, l hosszúságú vékony rúd nyugszik. A rudat a talajjal való érintkezési pontjától mérve kl távolságban, kicsi δ kitéréssel transzverzálisan benyomjuk. Azt tapasztaljuk, hogy a rudat hirtelen elengedve, bizonyos mértékig elrugaszódik a faltól. A rúd, illetve az alakváltoztatás paramétereivel kifejezve, egy egyszerűsítő modell keretein belül adjuk meg annak a feltételét, hogy a rúd a fallal ellentétes irányban eldőlj!

A rúd sűrűsége elég kicsi ahhoz, hogy a súlyából eredő effektusok zavaró hatása elhanyagolható legyen ott, ahol a rugalmassága játszik szerepet. Ezen felül természetesen a rúd kezdeti alakja is egyenesnek vehető. A számolás során feltételezhetjük, hogy bár egyrészt a transzverzális rezgések gyorsan elhalnak, ugyanakkor a rúd közel tisztán a lineáris rugalmassági határok között marad; illetve hogy a rúd benyomása lokálisan, egyetlen pontban történik.

(Gombkötő Ákos)

7. Egy záróvizsgán az elromlott légkondicionálóból vízcseppek hullottak az asztalra. Ahogy a foton is látható, a nagy csepp körül megfigyelhető volt egy apró cseppekből álló gyűrű. Hogyan keletkezik a gyűrű, és mitől függhet a sugara?

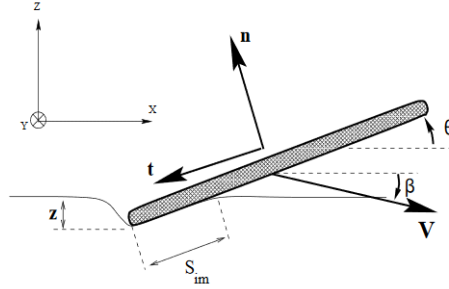


(Szabó István)

8. Egy zárt, hosszú, henger alakú, szobahőmérsékletű vízzel telt tartályban egy $V = 1 \text{ cm}^3$ térfogatú, normál nyomású légbuborék található. A tartályt egy úrállomáson, a súlytalanság állapotában óvatosan gyorsítva forgatni kezdjük a szimmetriatengelye körül, majd mikor a tartály eléri az $\omega = 30 \text{ s}^{-1}$ szögsebességet, azt állandó értéken tartjuk. Milyen alakot vesz fel ekkor a légbuborék? Adjuk meg a buborék jellemző méreteit! A víz felületi feszültsége $\sigma = 0,07 \text{ N/m}$.

(Vigh Máté)

9. Lapos kavicsok megfelelő hajítása esetén a kavics a vízfelszínről történő többszörös visszapattanás (ú.n. kacsázás) után süllyed el. Becsüljük meg a visszapattanások számát a dobás paramétereinek függvényében! Van-e felső határa a visszapattanások számának?



A kavicsot M tömegű, merev, lapos hengernek tekinthetjük, az alapját körnek vagy négyzetnek választhatjuk. A vízfelület sík, a szél és hullámok hatását elhanyagolhatjuk.

Info: A kő vízzel való ütközése magas Reynolds-számú folyamatnak vehető, a vízfelület által a kőre kifejtett erő:

$$\mathbf{F} = \frac{C_l}{2} \rho_w V^2 S_{\text{im}} \mathbf{n} + \frac{C_f}{2} \rho_w V^2 S_{\text{im}} \mathbf{t},$$

ahol V a kavics sebessége, C_l és C_f dimenziótlan együtthatók, melyeknek a dőlésszögtől való függését elhanyagolhatjuk. A képletben ρ_w a víz sűrűsége, S_{im} a kő bemerülő felületének nagysága, \mathbf{n} és \mathbf{t} pedig az ábrán látható egységvektorok.

(Gombkötő Ákos)

10. A gépjárművek haladása, mint tudjuk, veszteségekkel jár – ezt a közegellenállás és a gördülési ellenállás fizikai fogalmainak segítségével szokták tárgyalni. Ezért – Newton első törvényével ellentétben – az autók egyenes vonalú egyenletes mozgatásához a jármű motorjának állandó teljesítményt kell kifejtenie.

Esőben haladó autók esetében azonban további fizikai jelenségek is fellépnek, amelyek szintén növelik a jármű állandó sebességű mozgatásához szükséges teljesítményt, hiszen az energiát az autó motorjától vonják el.

Milyen extra jelenségek fékezik az esős úton haladó autót? Becsüljük meg az egyes jelenségek által elvont energiát a jármű sebességének függvényében!

Nem kell figyelembe venni azt, hogy a rossz látási viszonyok miatt a sofőr eleve lassabban vezet, illetve hogy az úton a járművek összetorlódnak. Egyetlen magányos, üres úton állandó sebességgel haladó autó esetét vizsgáljuk!



(Härtlein Károly)

11. Vizet a kövekből! Így hangzik a terraformálási pályázat jelszava, mely elsősorban a légkutatokra vonatkozik. Nekünk csak egyetlen kérdésünk van: Nagyságrendileg mennyi vizet lehet elvileg képes egy légkút kondenzálni naponta a légkörből: a) szélmentes, b) szeles időben?

Konkrét becsléshez használjunk realiztikus paramétereket! Becsüljük meg azt a legkisebb r távolságot, mely esetén két légkút működése nem befolyásolná egymást! Végezzük el a számolást külön-külön Írország, Magyarország és a Szahara-sivatag páratartalom-adatai alapján!

(Gombkötő Ákos)

12. A hideg tengerben kétfajta jégtábla fordul elő. Az egyik a gleccserjég, ami a gleccserekről szakad le nagy darabokban, a másik, a tengeri jég, úgy keletkezik, hogy a tengervíz kifagy. A jégtörő hajók kapitányai ránézésre meg tudják különböztetni a kettőt, és tudják, hogy a gleccserjég nagyon kemény, azt nem minden jégtörő hajó tudja széttörni. A tengeri jeget viszont könnyű széttörni. Miből adódik, hogy a tengeri jég könnyebben törik?

(Tichy Géza)

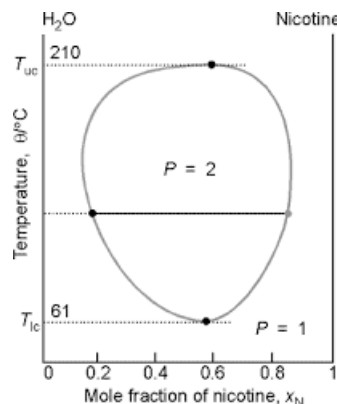
13. Egy lufit szén-dioxid, egy másikat argon gázzal töltünk meg, a szájukat pedig ráhúzzuk egy-egy kémcsőre. Mindkét kémcsövet folyékony nitrogénbe mártjuk. A lufik egy idő után lekókadnak. Amikor ezután kivesszük a kémcsöveket a nitrogénből, az argont tartalmazó csőben, a cső alján szilárd csapadékugót látunk. Ezzel szemben a szén-dioxiddal töltött cső teljes falát befedi a szilárd csapadék. A két anyag hasonló színű, de vajon mi okozza a szilárd anyag nagyon eltérő eloszlását?

(George Fischer)

14. Három azonos, állandó hőkapacitású test közül kettőnek a hőmérséklete $+19^\circ\text{C}$, a harmadiké -200°C . Lehet-e külső hő és munka befektetése nélkül, csupán termodinamikai gépeket (hőerőgép, hűtőgép) működtetve a testek között, felmelegíteni valamelyik testet $+200^\circ\text{C}$ -ra?

(M. W. Zemansky ötlete nyomán Radnai Gyula)

15. A nikotin – víz rendszer fázisdiagramját mutatja az ábra. Kis és nagy koncentrációnál a két anyag korlátlanul oldja egymást, de közepes koncentrációnál fázis-szétválás jön létre. Az egyszerűség kedvéért közelítsük ellipszissel az ábrán a kétfázisú tartomány alakját, és ezt felhasználva adjunk meg olyan lehetséges, a termodinamikai kritériumoknak megfelelő szabadenergia vs. hőmérséklet és koncentráció, azaz $F(T, x)$ függvényt, amelyből ez a fázisdiagram adódhat!



(Tichy Géza)

16. Az iparban sokszor alapvető fontosságú, hogy hibamentes vékonyrétegeket tudjunk növeszteni. Tipikus alkalmazás az, ha egy félvezető-mintára valamilyen más félvezetőréteget növesztünk.

Ha a réteg nagyon vékony, általában (bár nem kivétel nélkül) felveszi az alatta lévő tömbanyag kristályszerkezetét. Fizikailag könnyen látható, hogy egy elég vastag réteg már a saját anyagának megfelelő kristályszerkezetet fogja felvenni, hiszen energetikailag az kedvezőbb. Ez azt jelenti, hogy egy vastag rétegben meg kell hogy jelenjenek él-diszlokációk, amelyek jelenléte természetesen elrontja a vékonyréteg kedvező (pl elektronikai) tulajdonságait.

Adjunk egy biztonságos felső becslést a hibamentes szilícium vékonyréteg vastagságára, melyet GaAs tömbanyagra növesztettünk!

(Gombkötő Ákos)

17. Egy 2 cm átmérőjű, 4 cm hosszú henger alakú dugót nézünk egy 5 dioptriás, 4 cm átmérőjű lencsével. A lencse 30 cm-re van a szemünktől, és a dugó alapköre a lencse mögött van 2 cm-re. A henger tengelye és az optikai tengely egybeesik. Rajzoljuk le papírra, amit látunk, olyan nagyításban, hogy a lencse átmérője a papíron 6 cm legyen!

(Tichy Géza)

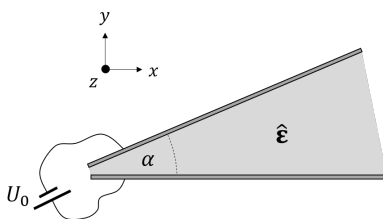
18. Nyári emlék... Ragyogóan süt a Nap, hullámszik a Balaton (természetesen szabályos szinuszos síkhullámokkal). A napsugarak egymással párhuzamosan, a hullámok gerincére merőlegesen, a függőleges iránnyal állandó szöget bezárva érkeznek. A hullámos vízfelületről visszaverődő napsugarak a víz fölött bizonyos vonalak mentén összetorlódnak, nagy fényerősségű kausztikus felületeket alkotnak. (A jelenség szimmetriája miatt a következő vizsgálatokat elég két dimenzióban, a hullámok gerincére merőleges síkban elvégezni.)

Számítsuk ki paraméteres alakban a kausztikák egyenletét! Ábrázoljuk grafikusán a hullámfelület egyes pontjairól visszaverődő fénysugarakat, és ugyanezen az ábrán az analitikusan kiszámolt kausztikákat is – ellenőrizzük az illeszkedést! Készítsünk több ábrát, a paramétereket (a hullámok amplitúdója és hullámhossza, valamint a napfény beesési szöge) változtatva!

Magyarázzuk meg kvalitatív (és ha lehet, kvantitatív) módon a kausztikák észlelt geometriai jellegzetességeit! Hol és miért jelennek meg szinguláris pontok, csúcsok a kausztikákon? Adjuk meg a helyzetüket!

(Cserti József, Kaufmann Zoltán, Dávid Gyula)

19. Két nagy méretű, α szöget bezáró fémlapból álló síkkondenzátor fegyverzetek közötti teret ϵ permittivitás-tenzorú, egytengelyű kettőtörő dielektrikummal töltünk ki az ábrán látható módon, majd egy telep segítségével U_0 feszültséget kapcsolunk rá.



A kettőtörő anyag főtengelyei az ábrán jelölt x , y és z irányok, az egyes irányokban lineárisan polarizált elektromágneses hullámok esetén a törésmutatókra fennáll, hogy $n_x > n_y = n_z$.

a) Mekkora az U elektromos potenciál és az \mathbf{E} elektromos térerősségvektor értéke a kondenzátorlemezek között egy tetszőleges pontban?

b) Milyen alakúak, milyen struktúrájuk az erővonalak és az ekvipotenciális felületek? Készítsünk vázlatos ábrát!

c) Mekkora a w_e elektromos energiasűrűség a fegyverzetek között a hely függvényében?

(Németh Róbert)

20. Vákuumban két egyforma, $r = 1$ cm sugarú, $m = 1$ g tömegű, egymástól $l = 1$ m távolságra levő fémgolyót egyenes pályán elindítunk egymás felé. Mindkettő kezdősebessége $v = 10$ m/s. Az egyik golyó semleges, a másik töltése $Q = 10^{-7}$ C. Az ütközésük centrális, és teljesen rugalmas. Adjuk meg a sebességüket, amikor újra $l = 1$ m távolságra kerülnek egymástól!

(Holics László ötlete alapján Woynarovich Ferenc)

21. Legyen $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ rögzített pont. Határozzuk meg azt az adott, véges felszínű $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ felületet, amelyre ha

$$\mathbf{d}(\boldsymbol{\xi}) = \frac{\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|}$$

felületi dipólmomentum-sűrűséget helyezünk, akkor az $\mathbf{E}(\mathbf{x})$ elektromos térerősség abszolút értéke maximális lesz!

(Csirik Mihály, Helesfai Gábor, Homa Gábor)

22. A K tehetetlenségi rendszerhez viszonyítva állandó $v = \beta c$ sebességgel egyenes vonal mentén mozgó rakéta fénysugarat bocsát ki. A fénysugár a rakéta K' nyugalmi rendszerében állandó helyzetű, és merőleges K és K' relatív sebességének irányára. A térben finoman eloszló, K -ban nyugvó kozmikus por a fényt „láthatóvá” teszi. Milyen alakú fénynyalábot lát a K -ban álló, a rakéta pályájától a fénysugár által végigpásztázott síkra merőleges irányban d távolságra elhelyezkedő megfigyelő?

(Varga István (1952-2007) ötlete alapján Woynarovich Ferenc)

23. Egy szabad elektron azzal a minimális energiával mozog, ami éppen lehetővé teszi a következő forgatókönyv érvényesülését: Az elektron elnyel egy vele szembe mozgó fotont. Ezután kibocsát egy virtuális fotont, amely később egymással ellentétes irányba haladó elektron-pozitron párra bomlik, mindkettő sebességének nagysága megegyezik a tovább haladó eredeti elektron végső sebességének nagyságával.

a) Mekkora volt az eredeti elektron sebessége? Hányszorosa az elektron által elnyelt foton energiája az elektron eredeti energiájának? Mekkora az elnyelt foton által „felhízalt” elektron tömege? Mekkora a virtuális foton energiája és impulzusa? Mekkora sebességgel távolodik egymástól a párkeltés során keletkezett elektron és pozitron?

b) Magyarázzuk meg, miért kell a forgatókönyv érvényesüléséhez egy minimális energia, milyen „geometria” szélsőérték-tulajdonság tünteti ki ezt az energiaértéket!

c) Térjünk át az eredeti elektron nyugalmi rendszerébe, írjuk le a teljes folyamatot, és ismét válaszoljunk a fenti kérdésekre!

d) Az eredeti elektron nyugalmi rendszerében nincs értelme arról beszélni, hogy „az elektron azzal a minimális energiával mozog” – hiszen az elektron energiája megegyezik a nyugalmi energiájával. Milyen extrémális tulajdonság tünteti ki akkor a vizsgált jelenséget a hozzá hasonlók közül?

A feladat megoldása során ne használjunk tizedestörteket, csak valódi törteket és gyökös kifejezéseket! *Javaslat:* használjuk a $c = 1$ és $m_e = 1$ egységrendszert (ahol c a fénysebességet, m_e az elektron tömegét jelöli)!

(Dávid Gyula)

24. Egy rakéta egyenes vonalban mozog, sajátidő-egységenként állandó tömegű hajtógázt lövellve ki hátrafelé. A gáznak a rakétához viszonyított sebessége $u = c/n$, ahol c a fénysebesség, n pedig 1-nél nagyobb szám. Ha a rakéta teljes egészében hajtógázból állna, tömege T idő alatt csökkenne nullára.

A téridő mely pontjáig juthat el a gyorsuló rakéta az üzemanyag elfogyása előtt? Adjuk meg a választ az n paraméter függvényében! Vizsgáljuk meg a fotonrakétát is, mint határesetet!

(Dávid Gyula)

25. Egy nagy méretű, homogén, $\varepsilon = 9/4$ dielektromos állandójú és $\mu = 1$ mágneses permeabilitású anyagból készült, teljesen átlátszó üvegtömb halad a negatív x -tengely irányába $v = 2c/3$ sebességgel, ahol c a vákuumbeli fénysebességet jelöli. Az üvegtömbben a pozitív x -tengely irányába mutató \mathbf{k} hullámszám-vektorral jellemezhető elektromágneses síkhullám terjed. Adjuk meg az \mathbf{E} , \mathbf{D} , \mathbf{B} és \mathbf{H} vektormezők komponenseit az üvegtömb belsejében mint az \mathbf{r} helyvektor és a t idő függvényeit! (Ha több független módus lehetséges, vizsgáljuk meg mindegyiket!) A felületi effektusoktól tekintsünk el!

(Dávid Gyula)

26. Keressük meg a hibát az alábbi okoskodásban! Legyen egy m tömegű részecske egy $2a$ szélességű, végtelen potenciálgödörben. A hullámfüggvény: $\Psi(x) = N(a^2 - x^2)$, ha $|x| < a$, ahol N egy megfelelő normálási tényező (számítsuk ki!).

Felhasználva, hogy a potenciálgödör belsejében a Hamilton-operátor $H = -\frac{\hbar}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2}$, azonnal látszik, hogy $H^2\Psi = 0$. Ebből eredően ennek a várható értéke: $\langle H^2 \rangle_\Psi = \langle \Psi, H^2\Psi \rangle = 0$. Ugyanakkor tudjuk, hogy $\langle H^2 \rangle_\Psi = \sum_n E_n^2 p_n > 0$. A fentiek alapján a kvantummechanika matematikai apparátusa ellentmondásos. :(

(Gombkötő Ákos)

27. Tekintsünk egy, a z -tengely körül forgó pontszerű részecskét. Keressünk egy olyan ψ kvantumállapotot, melyre a perdület z -komponensének szórása $\Delta L_z < \hbar/4\pi$! Tekintettel a φ azimutuszög és az L_z perdületkomponens közötti határozatlansági relációra – nem találjuk furcsának az ilyen állapotok létezését?

(Fejős Gergely)

28. Ismert, hogy egy kétállapotú rendszer és egy elektromágneses módus csatolását leíró Jaynes-Cummings modell, mely felhasználja az ún. forgóhullámú közelítést, hasznos fizikai képet ad bizonyos kvantum-elektrodinamikai jelenségek értelmezéséhez. A forgóhullámú közelítésben az alapállapot ($|g\rangle|0\rangle$) statikus – vagyis esetleges fázisfaktoroktól eltekintve a dinamika nem változtatja meg –, de tudjuk hogy egzakt dinamika esetén, vagyis a forgóhullámú közelítés hiányában ez nem teljesül.

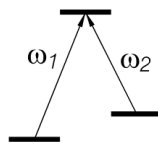
Tekintsük most azt a rendszert, ahol a két szint energiakülönbsége nulla, de dipólátmenet mégis lehetséges közöttük! Ezt a rendszert a következő Hamilton-operátor írja le:

$$H = \hbar\omega a^+ a + \hbar \frac{\Omega}{2} \sigma_x(a + a^+).$$

Adjuk meg a rendszer egzakt megoldását, azaz a fenti Hamilton-operátor által meghatározott időfejlődést, ha a rendszer kezdetben a fentebb leírt alapállapotban tartózkodik! A megoldás során semmilyen további elhanyagolás nem engedhető meg!

(Gombkötő Ákos)

29. Tekintsünk egy olyan gáz halmazállapotú anyagot, melynek két spektrális vonala az ábrán látható átmenetekkel jön létre!



A frekvenciákat kifejezhetjük mint $\omega_{1,2} = \omega_0 \pm \Delta/2$ -t. A spektrális sáv szélesség $\gamma \ll \Delta$. Az optikai átmeneteket klasszikus oszcillátorokkal modellezhetjük. Tegyük fel, hogy a 2. átmenetet egy ω_2 körfrekvenciájú lézer pumpálja! Becsüljük meg egy ω_0 átlagos frekvenciával jellemezhető impulzus csoportsebességét, ha $\Delta \approx 10^7/s$, és a részecskeszám-sűrűség $N/V \approx 10^{14}$ atom/cm³!

(Gombkötő Ákos)

30. Az m tömegű, ω frekvenciájú, γ csillapítással jellemzett csillapított harmonikus oszcillátor kvantum disszipációját Born-Markov közelítésben az alábbi master-egyenlet írja le:

$$i\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = \left[\frac{\hat{p}^2}{2} + \frac{\omega^2 \hat{x}^2}{2}, \hat{\rho} \right] - i\frac{2\gamma m k_B T}{\hbar^2} [\hat{x}, [\hat{x}, \hat{\rho}]] + \frac{\gamma}{\hbar} [\hat{x}, \{\hat{p}, \hat{\rho}\}],$$

ahol $\hat{\rho}$ a csillapított oszcillátort jellemző sűrűségoperátor, \hat{x} és \hat{p} a hely- és az impulzusoperátor, T az oszcillátort körülvevő környezet hőmérséklete, k_B a Boltzmann-állandó és \hbar a Planck-állandó. Indítsuk a sűrűségoperátor időfejlődését speciálisan a $\hat{\rho}_i = |\Psi\rangle \langle\Psi|$ tiszta állapotból!

Az állapot tisztaságát jellemző $\text{Tr}\hat{\rho}^2$ mennyiség időfejlődésének vizsgálatával derítsük ki, hogy a kezdeti Ψ hullámfüggvény σ_{xx} szélességére vonatkozó, a de Broglie féle $\lambda_{th} = \sqrt{2\pi\hbar^2/(mk_B T)}$ termális hullámhosszat is tartalmazó

$$\sigma_{xx} = \sqrt{\text{Tr}(\hat{x}^2 \hat{\rho}_i) - [\text{Tr}(\hat{x} \hat{\rho}_i)]^2} > C \cdot \lambda_{th}$$

szükséges fizikai feltételben szereplő C konstans értéke legalább mekkora kell legyen ahhoz, hogy biztosan ne sérüljön a $0 \leq \text{Tr}\hat{\rho}^2 \leq 1$ fizikai feltétel a folyamat indításának megkezdésétől számítva rövid időtartamra nézve!

(Homa Gábor, Lisztes László)

31. Kísérjük meg a „súly” fogalmának kovariáns értelmezését az általános relativitáselméletben az alábbi kísérleti szituáció elemzésével! Egy földi kísérletben az egész Földet (az idealizált Földet szigetelő, saját mágneses tér nélküli gömbnek tekintjük) átható homogén mágneses térben keringtetünk egy részecskét, melynek tömege m , töltése q , a keringés körfrekvenciája ω a Föld felszínén álló együttmozgó megfigyelő szerint. Ez a részecske a keringés mellett nyilvánvalóan esik is a Föld felé. Tegyük fel, hogy a Föld gravitációs vonzását kiegyensúlyozzuk egy gyenge, a Föld középpontjából radiálisan kifelé mutató elektromos térrel, hogy a részecske ne essen a Föld felé. Mekkora térerősség szükséges ehhez? A fentiek alapján adjunk formális definíciót a szóbanforgó relativisztikus, keringő részecske „súlyára”, és értelmezzük a kapott eredményt heurisztikusan is! *Megjegyzés:* automatizált számolás (Maple stb.) megengedett. Linearizált gravitációs közelítés megengedett (de nem szükséges).

Info 1: Egy, a Földet tartalmazó végtelen nagy szolenoid mágneses tere (azaz, a „homogén” mágneses tér) a Schwarzschild-téridőben

$$B^a(t, r, \vartheta, \varphi) \sim \sqrt{1 - \frac{r_S}{r}} \left(0, \cos \vartheta, -\frac{1}{r} \sin \vartheta, 0 \right)$$

alakú (a szokásos Schwarzschild-koordinátákban), a Földdel együttmozgó megfigyelő szerint. Ez a mágneses tér tartja körpályán a részecskét. A belőle származtatott elektromágneses térerősségtenzor a következő alakú:

$$F_{bc}^B = -u_0^a \sqrt{-\det(g)} \epsilon_{abcd} B^d.$$

Info 2: A Földhöz képest radiális elektromos tér (azaz egy képzeletbeli, a Föld kérge alá beágyazott, egyenletesen töltött gömbhéj elektromos tere) a Schwarzschild-téridőben

$$E_R^a(t, r, \vartheta, \varphi) \sim \frac{1}{r^2} \left(0, \sqrt{1 - \frac{r_S}{r}}, 0, 0 \right)$$

alakú (Schwarzschild-koordinátákban), a Földdel együttmozgó megfigyelő szerint. A belőle származtatott térerősségtenzor

$$F_{ab}^{E_R} = u_0^c g_{ca} E_R^d g_{db} - u_0^c g_{cb} E_R^d g_{da}.$$

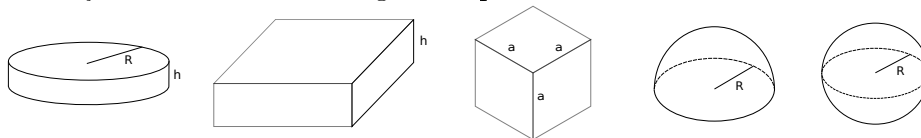
alakú. Ez az elektromos tér tartja meg a részecskét a gravitációs esés ellen. (A fenti képletekben u_0 a Földdel együttmozgó megfigyelő sebességmezéjét jelöli.)

(László András)

32. Töltsünk egy lufiba P_0 nyomású, T_0 hőmérsékletű ideális gázt, majd ejtsük bele egy fekete lyukba! Határozzuk meg a gáz nyomásának és hőmérsékletének helyfüggését a lufi belsejében, amikor a lufi eléri a fekete lyuk horizontját! Feltehetjük, hogy a lufi sokkal kisebb, mint a fekete lyuk, valamint hogy a lufi anyagának és a benne levő gáznak a tömege elhanyagolható.

(Kocsis Bence)

33. Az utóbbi időben egy veszedelmes áltudományos nézet van terjedőben. Egyesek azt az abszurd elképzelést propagálják, hogy Földünk – amelynek lapos korong alakját minden józan ember kora gyermekora óta jól ismeri és szereti – mégsem ilyen alakú. Az egymással Párhuzamosan terjesztett vad fantazmagóriák a kockától a félgömbön át a gömbig terjednek. A mellékelt ábrán bemutatunk néhányat ezekből a nevetséges elképzelésekből.



A Dr. Absoluto Zéróról elnevezett Gumiparti Tudományos Akadémia Geo-fizikai és Geo-metriai Osztálya elhatározta, hogy Abszolút alapos kísérletsorozattal egyszer s mindenkorra megcáfolja ezeket a valóságtól elrugaszkodott ötleteket. A módszer annyira egyszerű, amennyire csak egy ilyen tisztán tudományos mérési módszer lehet. És persze annyira olcsó is. (Lehet, hogy a kísérlet tényleges megvalósítása során az utóbbi kitételt némileg revideálni leszünk kénytelenek.) A kísérlet során egy függőleges lyukat fúrunk a Földbe, egészen addig, míg el nem érjük a másik oldalát. A fúrólyukat (szimmetria- és egyéb okokból) természetesen a Világ Közepéhez egészen közel készítjük el, ennek sok egyéb mellett az az előnye is megvan, hogy kisvasúttal jól megközelíthető, így a fúróberendezés és a szükséges fúrószemélyzet szállítása nem okozhat gondot. A lyuk fúrására már ki is írtuk a közbeszerzési pályázatot.

A lyuk elkészülte után egy próbatestet (pl. a kiváló minőségű gumiparti gumiból készült standard focilabdát) ejtünk bele. A test a lyukba esve eleinte gyorsul, majd a Föld másik oldalához közeledve lassulni kezd, megáll, visszafordul, végül ismét a kezünkbe érkezik. (Egy Abszolút ideális módon megfúrt lyukban természetesen sem közegellenállással, sem a lyuk falával való súrlódással nem kell számolnunk.)

Az évszázadok óta jól ismert lapos Föld-korong átmérőjét (a korongot övező Végső Jégfalig) természetesen pontosan tudjuk: korábbi mérések alapján ez 40 000 km. A fúrás során megtudjuk a korong vastagságát is. Ezután fizikusaink a Dr. Absoluto Zéró Művek által gyártott abszolút pontos digitális kronométerrel megméri a labda oda-vissza útjához szükséges repülési időt, majd ennek alapján kiszámítják a korong sűrűségét (mely – mint Dr. Absoluto Zéró vonatkozó műveiből tudjuk – a vékony felszíni, talajmenti rétegtől eltekintve mindenütt állandónak tekinthető, hiszen a gumiparti nép egységét semmiféle földalatti egyenetlenség és mozgolódás sem zavarhatja).

Végül a mért repülési időt összehasonlítjuk a Föld alakjára a rémhírterjesztők által tett különböző Párhuzamos javaslatokban szereplő alakok esetén (a mért vastagság és sűrűség adatainak felhasználásával) számítható repülési idővel. Természetesen durva eltérések fognak fellépni. Így az elvégzendő mérés remélhetőleg örökre befogja a huhogók száját, és véget vet az ostoba alternatív, „Párhuzamos” „modellek” áradatának.

Jelen pályázatunk felhívás arra, hogy elméleti szakembereink még a kísérlet tényleges elvégzése előtt számítsák ki a Föld alakjára javasolt, a mellékelt ábrákon szereplő különböző alakzatok esetére a szabadon eső test teljes oda-vissza repüléséhez szükséges időt. Az alakzatok geometriai adatait és a Föld sűrűségét kérjük paraméterként kezelni. A lyukat a Világ Közepénél, a lehető legszimmetrikusabb módon kell elhelyezni.

Az összehasonlítandó alakzatok: a) (a Föld valódi alakja:) lapos korong, b) véges vastagságú végtelen lemez, c) kocka, d) félgömb, e) (ez már teljesen nevetséges!) gömb.

Info: Newton három mechanikai Alaptörvénye és gravitációs törvénye (a legközelebbi törvénymódosításig) lapzártakor még hatályban van.

(Cserti József és Dávid Gyula)

\end{document}